La Torre del Virrey
Revista de Estudios Culturales

Libros

364

Serie 10.ª 2012/1

La Herencia De Gödel: Revisitando La Lógica

Giuseppe Raguní[1]

I. Prólogo

Desde siempre, después de haber gozado de los frutos del genio de algunos hombres extraordinarios, tenemos que expiar la indiscutibilidad de cualquiera de sus conclusiones: todo aquello que han afirmado es oro. En Física, un experimento puede acabar con la más obstinada de las persuasiones, pero si la materia está en relación con la Filosofía pura, las cosas son mucho más complicadas y casi nunca solucionables de manera perentoria.

Sin embargo en algunos sectores "aplicados" de la Filosofía, como en la Lógica matemática, desde hace algún tiempo es posible – e imperioso – exigir exactitud y rigor. El formalismo introducido por Hilbert a finales del XIX, de hecho, ha dotado a las disciplinas matemáticas de una sistematización simbólica estable, privada de la ambigüedad de intervenciones intuitivas y susceptible de un riguroso análisis epistemológico. Consecuencia de ello han sido los admirables – y asombrosos – resultados de la Lógica moderna, encabezados por las demostraciones de Gödel.

A pesar de lo dicho, hoy en día todavía son muy habituales no pocos errores graves y equivocaciones incluso sobre temas de importancia fundamental. Estos deslices, junto al uso de una terminología que ya desde tiempo se ha revelado como insidiosa e insuficiente, obstaculizan la difusión – y no sólo en ámbito humanístico – de este inestimable y fascinante saber.

Aclararemos brevemente algunas de estas confusiones, conscientes de no poder exigir, en esta sede, el adecuado grado de profundidad que los argumentos merecerían.

II. El lastre de una frase

El primer apunte concierne al ámbito de aplicación del Primer Teorema de incompletitud de Gödel. Omitiremos, aquí, tanto la enunciación como las importantísimas consecuencias de este famoso Teorema, que el lector podrá encontrar en un cualquier buen libro de Lógica. Lo que hay que subrayar es que las propias hipótesis del Teorema exigen la *numerabilidad* del conjunto de los teoremas y de las demostraciones de la Teoría a la cual puede aplicarse[2]. Como operación previa a la demostración, Gödel establece un par particular código numérico (llamado brevemente *gödeliano*) tanto

1 Doctor en Ciencias Físicas. Universidad Católica de Murcia. E-mail: graguni@pdi.ucam.edu

2 Un conjunto se dice *numerable* si existe una correspondencia biunívoca de sus elementos con los números naturales.

ISSN 1885–7353

para los enunciados como para las demostraciones. Cuando se aplica a la Teoría formal[3] de los números naturales (o Aritmética de Peano, desde ahora *PA*), esta codificación hace que a cada enunciado y a cada demostración resulte asignado un código numérico, único y exclusivo. Pero, ¿qué pasa si se hace lo mismo con una Teoría aritmética que posee un número *no numerable* de teoremas? Esta Teoría existe y se llama normalmente Aritmética “del segundo orden”. En sus premisas se halla un esquema axiomático que, generalizando el principio de inducción de *PA*, introduce un axioma para cada elemento de *P(N)*, el conjunto de todos los subconjuntos de números naturales. Puesto que este conjunto, como es bien sabido, no es numerable, se sigue que también los conjuntos de los teoremas y de las demostraciones son innumerables. Por lo tanto, en esta Teoría, no todas las demostraciones pueden poseer un distinto *gödeliano*: o serían numerables. La no numerabilidad de las demostraciones revela el uso imprescindible de una estrategia *intrínsecamente semántica* (o sea con empleo de significados no enteramente codificables) para la deducción de los teoremas. Aun queriendo considerar el principio de inducción *completa* como un solo enunciado simbólico, se constituye un axioma semántico que no es decidible (ni efectivamente numerable), en cuanto su semanticidad no es eliminable. A esta conclusión se llega, por ejemplo, representando el Sistema en la Teoría formal de los conjuntos: el axioma se traduce en un esquema axiomático conjuntista que genera una cantidad innumerable de axiomas inductivos[4].

La simple consecuencia es que el Primer Teorema de incompletitud no puede aplicarse a la Aritmética “del segundo orden”[5]. Sin embargo este equívoco ha sido larga y escandalosamente difundido en todas partes, hasta en ámbitos específicamente técnicos[6]. A menudo se percibe un típico e inesperado abandono de rigor terminológico sobre la cuestión (quizás indicio de dudas mal escondidas); una frase reiterada, por ejemplo es: “también la Aritmética de segundo orden, puesto que contiene los axiomas de *PA*, es sojuzgada por Teorema de incompletitud”. Olvidando que también debe conservarse la *efectiva axiomatizabilidad*. Emblemático es el caso de la Teoría que se obtiene desde *PA* añadiendo como axiomas todos los enunciados de *PA* verdaderos en el *modelo estándar*: ésta también contiene todos los axiomas de *PA*, pero es completa.

Para decirlo todo, incluso es posible que la Aritmética “del segundo orden” sea sintácticamente completa, aunque su lenguaje sea semánticamente incompleto. Tratándose de un Sistema no formal, la respuesta a esta interesante pregunta no puede que ser obra de la Metamatemática[7].

Quedan bien pocas dudas de que esta situación se deba a la reverencia por la figura de Gödel. En la presentación de su Teorema en el congreso de Königsberg del 1930, Gödel anunció su resultado como “una prueba de la incompletitud semántica de la Aritmética,

---

3 En todo el artículo, con el adjetivo *formal* entenderemos “privado de significado explícito”, o bien *simbólico, sintáctico, codificado*.

4 G. RAGUNÍ, *Confines lógicos de la Matemática*, revista cultural *La Torre del Virrey - Nexofía*, en la Web: http://www.latorredelvirrey.es/nexofia/pdf/Confines-logicos-de-la-matematica.pdf (2011), p. 153-158.

5 De hecho en esta Teoría, el enunciado de Gödel, cuya interpretación estándar es “*no existe código de una demostración de este mismo enunciado*” ya no equivale a “*yo no soy demostrable en esta Teoría*”, como sucede en *PA*.

6 Dos ejemplos: <<*ovviamente il primo teorema d'incompletezza è dimostrabile anche nell'Aritmetica al secondo ordine*>>, E. Moriconi, *I teoremi di Gödel*, SWIF (2006), en la *Web*: http://lgxserve.ciseca.uniba.it/lei/biblioteca/lr/public/moriconi-1.0.pdf, p. 32; C. Wright, *On Quantifying into Predicate Position: Steps towards a New(tralist) Perspective* (2007), p. 22. En este último trabajo quizás es significativo que el autor comente esta propiedad con una serie de delicadas cuestiones epistemológicas. De todas formas, en ambos casos la propiedad es considerada como obvia, sin ninguna explicación.

7 G. RAGUNÍ, op. cit. (nota n. 3), p. 296-297.

La Torre del Virrey
Revista de Estudios Culturales

puesto que ésta es categórica[8]". Se habla, sin duda, de la Aritmética "del segundo orden", la cual, a diferencia de *PA*, es categórica[9]. Ante todo hay que señalar que, como consecuencia del Teorema de Löwenheim-Skolem[10], basta la categoricidad (junto a la infinidad del modelo) para garantizar la incompletitud semántica del lenguaje de una Teoría cualquiera. Sin embargo, antes del 1936, cuando se hizo popular la generalización de Malcev, ningún lógico del tiempo (incluido Skolem) se dio cuenta de todas las desconcertantes consecuencias de este último fundamental Teorema. Gödel, de hecho, funda su afirmación aplicando – equivocadamente – el Primer Teorema de incompletitud a la Aritmética "del segundo orden": efectivamente, de la incompletitud sintáctica y de la categoricidad se sigue también la incompletitud semántica.

Ahora bien, tratándose del lógico más grande de todos los tiempos, cabe preguntarse no sólo qué lo indujo a error, sino sobre todo por qué su afirmación nunca ha sido corregida posteriormente. Contestar a la primera cuestión no parece fácil. Habría que observar que Gödel, por lo menos hasta el 1930, muy raramente distingue los dos tipos de Aritmética, tan diferentes desde el punto de vista lógico. Por otra parte en aquel período, ni él ni ningún otro lógico evidencia nunca la *intrínseca semanticidad* de las Teorías con un número no numerable de enunciados.

Se puede bien comprender, sin embargo, porque no nos haya llegado ningún tipo de corrección sobre la mencionada afirmación. La razón es que ésta involucra un argumento – la completitud / incompletitud semántica y su relación con la categoricidad – que en el fondo, como se entendió sucesivamente, no tiene nada que ver con la completitud sintáctica y por consiguiente con el Primer Teorema de incompletitud. En el curso de los años 30, dicho tema era de mucha actualidad, sobre todo a causa de las preocupaciones de Hilbert acerca del problema de la categoricidad. Gödel empezó demostrando que el lenguaje formal clásico[11] es semánticamente completo: si es consistente, siempre tiene por lo menos un modelo[12]. De ello seguía que una Teoría formal sintácticamente incompleta, es decir, con al menos un enunciado indecidible *I*, no podía ser categórica. Porque ésta admite al menos dos modelos no isomorfos: uno para el cual *I* es verdadero y otro para el cual es falso. Además de esto, Gödel siguió conjeturando – como tácitamente supuso Hilbert y todos los lógicos de aquel tiempo – que la completitud sintáctica de una Teoría formal (o, más en general, de una Teoría con un lenguaje semánticamente completo) implicaba su categoricidad. En consecuencia, justo después de su aceptación, el Primer Teorema de incompletitud se vio como un instrumento capaz de discriminar la categoricidad y/o la completitud semántica de los Sistemas. Por ejemplo, se juzgó que la Teoría formal *PA* era no categórica *porque* era sintácticamente incompleta.

Como ya señalamos, la comprensión completa del Teorema de Löwenheim-Skolem puso de manifiesto, después de algunos años, que la categoricidad es imposible para *todo* Sistema formal dotado de un modelo infinito (que es el caso de las Disciplinas de ordinario interés); *ya sea el mismo sintácticamente completo o no*. De esta manera, el tema en cuestión se descifraba finalmente gracias a las consecuencias del Teorema de completitud (de donde, en efecto, deriva el mismo Teorema de Löwenheim-Skolem). Ni Gödel, ni

8 K. GÖDEL, *Collected Works I: publications 1929-1936*, eds. S. Feferman et al., Oxford University Press (1986), p. 26-29.

9 Una Teoría se dice *categórica* si admite un único *modelo* a menos de isomorfismo. En palabras más sencillas (pero también más inexactas), si admite una única interpretación correcta.

10 Se incluye, aquí, tanto la versión "para arriba" como "para abajo".

11 Preferimos emplear esta expresión en lugar de la más habitual "Lógica clásica del Primer orden", por razones que aclararemos en el párrafo 4.

12 Teorema de completitud semántica, 1929.

otros lógicos enterados tuvieron buenas razones para volver sobre una frase que, en definitiva, se había revelado por lo menos desviadora a cerca de las consecuencias del Primer Teorema de incompletitud. Las cuales eran sí, muy profundas, pero concernían aspectos de naturaleza fundamentalmente distinta. Los más significativos relacionados con el concepto, nuevo y arrollador, de *máquina*, como fue aclarado principalmente por Church, Turing y luego Chaitin.

El triste epílogo es que, aún hoy, resultan frecuentes afirmaciones que, en sustancia, ratifican la desafortunada frase de Gödel sin ningún tipo de corrección. Por ejemplo: <<*la incompletitud sintáctica de la Aritmética del primer orden produce la incompletitud semántica de la Lógica de segundo orden*>>[13]. Pasando por alto la terminología del "orden expresivo" (que en efecto, como mostraremos más adelante, es ambigua), de nuevo parece que, en primer lugar, se quiera sugerir la transmisión automática de la incompletitud sintáctica al Sistema ampliado, o sea, al "de segundo orden" (primera equivocación); y, a continuación, a partir de la incompletitud sintáctica y de la categoricidad, deducir la incompletitud semántica (cuando bastaría la sola categoricidad, más la infinidad del modelo). Por lo demás, la afirmación se desmiente literalmente con la simple observación de que tampoco para el lenguaje de la Teoría integral de los reales (de segundo orden, en su versión original), informal y categórica, vale el Teorema de completitud; y esto a pesar de que su versión formal de primer orden sea sintácticamente completa (como mostrado por Tarski). Evidentemente, la incompletitud semántica del lenguaje de esta Teoría la *produce* sólo su categoricidad, junto a la infinidad del modelo.

Y hasta se repite el viejo tropiezo de que la no categoricidad de la Aritmética formal *se debe* a su incompletitud sintáctica. Algo así como decir que la infinidad de los polígonos *se debe* al hecho de que los triángulos isósceles sean infinitos.

III. Licencias de Chaitin

En el 1970, Gregory Chaitin formuló una interesante versión informática del Primer Teorema de incompletitud. En su exposición más simple, ésta prescribe que cualquier máquina que verifica la Tesis de Church-Turing[14] puede establecer la *casualidad* de un número necesariamente finito de cadenas de símbolos. La *casualidad* de una cadena simbólica, se define mediante la imposibilidad, para la máquina misma, de comprimirla más allá de un cierto grado (che deberá fijarse antes). Para toda máquina, existe un número infinito y preponderante de cadenas casuales: de hecho, se puede fácilmente concluir que, fijada arbitrariamente una cadena finita de símbolos, la probabilidad de que una preestablecida máquina pueda comprimirla es siempre bastante baja (excepto de querer considerar un grado de compresión realmente irrisorio). A pesar de esto las cadenas comprimibles son, ciertamente, infinitas; además hay que subrayar que los ordinarios productos humanos, codificados en símbolos, casi siempre no son casuales[15]. Gracias a la

---

13 E. Moriconi, *ibidem* (nota n. 4). Una frase muy similar se repite en el *abstract* di F. Berto, *Gödel's first theorem*, ed. Tilgher Genova, fasc. Epistemologia 27, n.1 (2004).

14 Esta famosa "Tesis", no es más que la hipótesis de que todas las máquinas sean reproducibles lógicamente mediante las *funciones recursivas* y viceversa. Las *funciones recursivas* representan todo el posible ámbito de calculabilidad aritmético. Explicaciones más exactas y detalladas pueden hallarse en un cualquier buen libro de Lógica.

15 De allí el éxito de las técnicas de compresión de archivos del tipo "loss-less", o sea, sin pérdida o alteración de datos, como "zip", "tar", etc. Sin embargo, para los productos con mayor casualidad, como vídeos y música, se puede comprimir eficazmente sólo con pérdida o alteración de datos, como en los formatos "jpeg", "mp3", etc.

interpretación de Chaitin, sabemos que una máquina cualquiera puede indicarnos sólo un número finito de las cadenas que no pue- puede comprimir. Como consecuencia, ningún programa de compresión, que termine siempre, puede ser establecido con certeza como ideal, o sea no mejorable: por absurdo, sería capaz de establecer la casualidad de cualquier cadena casual, por el hecho de no conseguir comprimirla; en violación de dicha versión de la incompletitud[16].

Desgraciadamente Chaitin ha difundido afirmaciones superficiales, a menudo incorrectas, que producen peligrosas confusiones sobre el tema de la incompletitud, de por sí ya no tan fácil. El hecho de que las mencionadas conclusiones valgan también para *máquinas universales*[17], lo ha inducido, en primer lugar, a desatender que la definición de *casualidad* se refiere siempre y en todo caso a una concreta máquina particular. Además, por el hecho obvio de que los números naturales, en todo ordenador corriente, se representan con cadenas simbólicas, él ha asignado precipitosamente la propiedad de la *casualidad* a los números naturales. Como resultado de esta ligereza, Chaitin se ha proclamado varias veces descubridor de "la casualidad en Aritmética"[18].

Reiteramos que la definida *casualidad* es una propiedad que sólo concierne a las cadenas de caracteres y repercute sobre los números naturales solamente por la codificación para ellos elegida. La cual es totalmente arbitraria desde el punto de vista lógico. De hecho es posible que una determinada máquina haga uso de una codificación (aunque incuestionablemente incómoda y dispendiosa de *bits*) que hace *finito* el número de naturales casuales (o, mejor dicho, de las cadenas que los representan)[19]. Además, como se ha dicho, la misma *casualidad* de las cadenas simbólicas es relativa al funcionamiento y al código de la máquina prefijada. Dada una cadena casual para una determinada máquina, arbitraria y suficientemente larga, nada impide que exista otra máquina, posiblemente concebida *ad hoc*, que consiga comprimirla. Para ella, previsiblemente, serán sin embargo casuales algunas cadenas compresibles en las máquinas que emplean los códigos ordinarios.

En el mismo artículo de "Le Scienze" citado en la penúltima nota, Chaitin escribe:

> *La mayor parte de los matemáticos no ha dado mucha importancia [a la incompletitud]... [en cambio] quizá sería necesario buscar nuevos axiomas válidos para los números enteros. La cantidad de problemas matemáticos que han quedado sin resolver durante cientos o miles de años tiende a reafirmar mi tesis. ¿No podría ser que alguno de estos enunciados fuese indemostrable? Si así fuera, quizás los matemáticos deberían aceptarlo como axioma. Esta propuesta podría parecer ridícula a muchos matemáticos... pero no a los científicos empíricos... En realidad, en algunos casos, los matemáticos ya han asumido como fundamento conjeturas no demostradas pero útiles.*

Estas palabras parecen proponer la "revolución gödeliana" de una "nueva" Matemática, de carácter empírico, que en realidad

---

16 G. RAGUNÍ, op. cit., p. 273.

17 Una máquina se dice universal si es capaz de reproducir lógicamente el comportamiento de cualquier otra máquina. Su existencia deriva por la Tesis de Church-Turing y por la existencia de funciones recursivas universales. Un ejemplo de máquina universal es cualquier PC, aunque sea modesto, pero con una memoria ampliable sin límite

18 Dos ejemplos: "*Recientemente he demostrado que existe una casualidad en la teoría de los números. Mi trabajo demuestra que – para usar una metáfora de Einstein – Dios a veces juega a dados con los números enteros!*", *La casualità in Aritmetica*, revista *Le Scienze* n. 241, septiembre (1988); "*En pocas palabras, Gödel descubrió la incompletitud, Turing la incomputabilidad e yo la casualidad*", prefacio al libro *The unknowable*, ed. Springer-Verlag, Singapur (1999). Frases de este tipo, de todas formas, se repiten en casi todas sus publicaciones, incluidas las más recientes.

19 Dos ejemplos en: G. RAGUNÍ, *op. cit.*, p. 276 y 281-282.

existe desde siempre: aquella que hace uso de conjeturas. Considerar éstas últimas como axiomas sin justificación metamatemática sería, evidentemente, inútil además de imprudente. Y no suena a progreso sino a presunción renunciataria: se desiste, a priori, de buscar metademostraciones de indecidibilidad que a menudo se han revelado ser fuentes preciosas de desarrollo tanto de la Lógica como de la Matemática. Más aún si se considera que el Teorema de incompletitud no obstaculiza para ningún enunciado indecidible la posibilidad de un reconocimiento puramente metamatemático. Este erróneo punto de vista se repite, con entusiasmo, en casi todos sus trabajos más recientes: de hecho él, sobre la base (epidérmica, ciertamente no lógica) del Teorema de incompletitud, ¡incluso llega a cuestionar hasta la oportunidad de los Sistemas axiomáticos[20]!

El lógico sueco Torkel Franzén, desaparecido recientemente, ha señalado en 2005 otras equivocaciones de Chaitin[21]. Referimos, aquí, únicamente aquella relativa a un artículo donde afirma que, como consecuencia de su versión de la incompletitud, *"un conjunto de axiomas de complejidad K, no puede demostrar un enunciado de complejidad sustancialmente mayor que K"*[22]. La frase mezcla incorrectamente la propiedad de que para cada máquina existen siempre infinitas cadenas casuales, con la capacidad demostrativa de la máquina misma (sujeta al Teorema de incompletitud). Franzén confuta dicha afirmación de manera simple e irrebatible: desde el solo axioma *"$\forall x(x=x)$"*, de complejidad constante, se puede obtener un teorema, *"$n=n$"*, de complejidad arbitrariamente grande al aumentar el número n.

La constante Ω, introducida por Chaitin en referencia a una predeterminada máquina universal, representa la probabilidad de que un programa de la máquina, elegido al azar, se pare. Su indiscutible interés radica en el hecho de que representa una especie de máxima *compresión* del saber matemático: a partir del conocimiento de los primeros *n bits* de Ω se puede resolver el problema de la parada para todos los programas de longitud menor o igual a n. No obstante, Chaitin exagera sobremanera su importancia, hasta pintar al número Ω como *el medio* para obtener el saber matemático[23]. Naturalmente, las cifras de Ω sólo son el inmejorable modo de resumir dicho conocimiento, tras haberlo obtenido mediante los tradicionales teoremas y metateoremas.

Estas críticas no tienen el objetivo de arremeter contra la figura de este gran lógico-informático, sino de aclarar un panorama que todavía se muestra bastante confundido, sobre todo para los no expertos.

IV. Una clasificación caduca

Queremos ahora criticar la clasificación corriente de las Teorías axiomáticas clásicas según el orden expresivo: *primer orden, segundo orden*, etc.[24]. Desgraciadamente se ha consolidado con los

---

20 G. CHAITIN, *The halting probability Ω: irreducible complexity en pure mathematics*, Milan Journal of Mathematics n. 75 (2007), p. 2 y ss.

21 T. FRANZEN, *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*, A.K. Peters (2005).

22 G. CHAITIN, *Gödel's Theorem and Information*, International Journal of Theoretical Physics, n. 22 (1982).

23 "*Ω is the diamond that [...] en principle enable you to tell whether or not the Riemann hypothesis is false*", G. Chaitin, *The halting probability Ω: irreducible complexity en pure mathematics*, Milan Journal of Mathematics n. 75 (2007), p. 12.

24 Un lenguaje se dice *del primer orden* si los cuantificadores "∃" y "∀" pueden referirse sólo a *variables* (como pasa en la expresión "cada recta paralela a r también es paralela a t"). Al segundo orden, se puede cuantificar también sobre los *predicados* (y traducir frases como: "cada relación que hay entre las rectas r y t la hay también entre las rectas r y s"). En el *tercer orden* se puede cuantificar también

años la opinión de que la formalidad del lenguaje (o, más en general, su completitud semántica) es una prerrogativa del primer orden expresivo y por otra parte que los lenguajes de orden superior son todos necesariamente semánticos (típicamente, no numerables). El error se debe principalmente a dos malentendidos.

El primero está ligado al significado de la expresión *Lógica clásica del Primer orden*. Con esta locución se entiende normalmente la colección de todos los *Cálculos predicativos clásicos*. Cada *Cálculo predicativo clásico* es una Teoría formal del primer orden que consiste: a) en algunos axiomas de base, del primer orden, especificados por primera vez por Russell y Whitehead, que formalizan los conceptos "no", "o" y "existe"[25]; b) en otros eventuales axiomas propios, numerables y del primer orden, que formalizan algunos conceptos particulares que se quieren emplear en la Teoría (por ejemplo: "igual", "mayor de", "ortogonal", etc.); c) en las cuatro reglas deductivas clásicas: *sustitución, particularización, generalización y modus ponens*. Puesto que estas reglas se componen de operaciones puramente *sintácticas* sobre los axiomas y/o los teoremas que se van deduciendo (o sea se aplican, maquinalmente, al solo código simbólico de estos enunciados), en todo Cálculo predicativo – así pues en la entera *Lógica clásica del primer orden* – resulta siempre verificada la formalidad. Sin embargo, esto no significa que *cada* Teoría del primer orden, fundada sobre un particular Cálculo predicativo clásico y que deduzca sólo con las cuatro reglas clásicas deba de ser formal. Nada impide, por ejemplo, que la Teoría añada un número no numerable de axiomas *propios* a este Cálculo, aunque todos expresados en el primer orden: resultaría un lenguaje intrínsecamente semántico y por lo tanto no formal. La *Lógica clásica del primer orden*, en otras palabras, no incluye a *todos los Sistemas clásicos del primer orden*. Infinitos de ellos usan un lenguaje informal y/o semánticamente incompleto[26].

La segunda equivocación está relacionada con el Teorema de Lindström. Éste afirma que toda Teoría clásica expresada en un lenguaje semánticamente completo *puede* ser formulada con un lenguaje del primer orden. La confusión deriva por confundir el *puede* con un *debe*. El Teorema no veta ni la formalidad, ni la completitud semántica de los lenguajes de orden superior al primero. Sólo afirma que, cuando se tiene este mismo caso, la Teoría puede ser re-expresada en un lenguaje – más simple –del primer orden. Ciertamente, esta propiedad distingue la particular importancia del primer orden expresivo. Una propiedad, por otra parte, que puede ya evidenciarse gracias a las capacidades expresivas de la Teoría formal de los conjuntos[27]: cada Sistema formal, de hecho, en cuanto totalmente representable en esta Teoría – que es del primer orden – es expresable con el primer orden.

Seguramente, el hecho indudable de que los lenguajes del segundo orden sean, en el caso típico, no numerables y por consiguiente intrínsecamente semánticos, agrava la situación. Ello se debe a que, si el modelo es infinito, los predicados varían, en el caso más general, dentro de un conjunto ciertamente no numerable. Pero nada impide que los axiomas limiten esta variabilidad a un subconjunto numerable; y, en particular, que esté respetada también la formalidad[28]. Un ejemplo concreto es el Sistema obtenido a par-

---

sobre relaciones todavía más generales (super-relaciones) y así hasta el infinito.

25 Los otros conceptos clásicos usuales, como "y", "implica" y "cualquier sea", se definen mediante éstos.

26 M. ROSSBERG, *First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness*, Hendricks et al. (eds.) Logos Verlag Berlin (2004), en la *Web*: http://www.st-andrews.ac.uk/~mr30/papers/RossbergCompleteness.pdf

27 Nos referimos aquí a una cualquiera entre NBG, ZF o MK.

28 Léase por ejemplo: H. B. ENDERTON, *Second order and Higher order Logic*, Standford Encyclopedia of Philosophy (2007), en la *Web*: http://plato.standford.edu/entries/logic-higher-order/.

tir de *PA*, expresando su principio de inducción parcial, es decir limitado a los enunciados con al menos una variable libre, como un único enunciado simbólico. Se forma un axioma del segundo orden que aún debe interpretarse semánticamente, ya que las premisas del Sistema no especifican ninguna deducción sintáctica con fórmulas del segundo orden. No obstante, dicha semántica no es *intrínseca*, es decir ineliminable: representando el Sistema en la Teoría formal de los conjuntos, este axioma se traduce en un esquema axiomático conjuntista que genera una cantidad *numerable* de axiomas inductivos formales. Por consiguiente, en la misma Teoría originaria la formalidad podría restablecerse añadiendo las oportunas premisas con las cuales operar sintácticamente a partir del axioma inductivo del segundo orden, de manera que se produzcan los exigidos teoremas sobre las propiedades enunciables simbólicamente. Aunque, claramente, existen estrategias más sencillas para reconstituir dicha formalidad[29].

Como resultado de esta confusión, a menudo se critica el carácter no formal de las Teorías del segundo (o más) orden, sobre la base de la intrínseca semanticidad de *algunas* de éstas. Y otros, en lugar de evidenciar que el problema no reside en el tipo de orden expresivo, sino en la particular fisonomía de las premisas de la Teoría, replican que "también algunos Sistemas del segundo orden poseen una apariencia formal como *aquellos del primero*". En todo caso, como *algunos del primero*.

En conclusión, la agrupación de las Teorías axiomáticas clásicas en base al orden expresivo despista, en general, sobre sus propiedades lógicas fundamentales. Éstas son consiguientes a la estructura de las premisas, donde el orden expresivo no juega siempre un papel decisivo. El principal instrumento de clasificación sigue siendo el respeto de la formalidad hilbertiana o, más en general, de la completitud semántica.

V. La interpretación del Segundo Teorema de incompletitud

Finalmente, hay que desbaratar la errónea interpretación habitual del Segundo Teorema de incompletitud. En referencia a una Teoría que satisface las mismas hipótesis del Primero, el Segundo Teorema de incompletitud generaliza la indecidibilidad a una clase de enunciados que, interpretados en el *modelo estándar* significan "este Sistema es consistente". Su compleja demostración, sólo esbozada por Gödel, fue publicada por Hilbert y Bernays en 1939.

La usual interpretación de este Teorema, objeto de nuestras críticas, es que "cada Teoría que satisface las hipótesis del Primer Teorema de incompletitud no puede demostrar su propia consistencia". Nos parece evidente, sin embargo, que la conclusión de que una Teoría no pueda demostrar su propia consistencia sea válida para todo *Sistema clásico*, incluso no formal. Además, dicha conclusión no corresponde al Segundo Teorema de incompletitud, sino a un nuevo Metateorema.

Consideremos un arbitrario Sistema clásico. Si es inconsistente, está privado de modelos y por lo tanto de cualquier sensata interpretación de toda proposición suya[30]. Por consiguiente, sólo admitir que un enunciado dado de una Teoría signifique algo, implica convenir su consistencia. Esto, en particular, vale también si la interpretación del enunciado es "este Sistema es consistente". Por ende, si no hay certeza de la consistencia de la Teoría (lo cual, a querer profundizar lo suficiente, vale para toda Disciplina matemática), tampoco la habrá sobre una interpretación cualquiera de su lenguaje. Por ejemplo, en el caso de la habitual Geometría,

29 G. Raguní, *op. cit.*, p. 160-161.
30 Más en profundidad: de cualquier interpretación que respete los principios de no contradicción y del tercer excluido.

La Torre del Virrey
Revista de Estudios Culturales

cuando se demuestra el teorema de Pitágoras, lo que se concluye en realidad es lo siguiente: "si el Sistema admite el modelo euclideo (y por lo tanto es consistente), entonces en cada triángulo rectángulo c12+c22=I2". Indudablemente, una deducción de firme valor epistemológico, incluso ante la catastrófica posibilidad de que el Sistema se desvele inconsistente. Sin embargo, pongamos que a un determinado teorema *T* de una cierta Teoría venga atribuido el significado: "este Sistema es consistente" en una dada interpretación *M*. Análogamente, lo que se concluye a través dicho teorema es en realidad: "si el Sistema admite el modelo *M* (y por lo tanto es consistente), entonces el Sistema es consistente". *Algo que ya sabíamos y, sobre todo, que no demuestra en absolutola consistencia del Sistema*. En definitiva, para un enunciado de este tipo se tiene una situación peculiar que lo diferencia de cualquier otro enunciado significativo en *M*: *preocuparse de demostrarlo dentro de la Teoría es ininfluyente sobre el ámbito epistemológico relativo a la interpretación M*. En palabras más simples, el enunciado en cuestión puede ser un teorema o ser indecidible sin que haya ninguna diferencia desde el punto de vista epistemológico. Sólo, no puede ser el negado de un teorema, si *M* es de verdad un modelo. En todo caso, *el problema de deducir la consistencia de la Teoría no está al alcance de la Teoría misma*. Proponemos llamar a esta conclusión del todo general *Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia*.

Luego, el hecho de que en un particular Sistema supuestamente consistente, un enunciado de este tipo sea un teorema o sea indecidible, depende del Sistema y de la propia forma del enunciado. Para las Teorías que satisfacen las hipótesis del Primero, el Segundo Teorema de incompletitud garantiza que "normalmente" estos enunciados son indecidibles. Hemos dicho "normalmente" porque al parecer existen también otros enunciados, del mismo modo formulantes la consistencia del Sistema en otros peculiares modelos, que, al contrario, resultan ser *teoremas* de la Teoría[31]. Como el mismo Lolli afirma, "parece que tampoco una demostración zanja las discusiones"[32]. Pero en ningún caso, como se ha concluido, este debate puede tener relación con la validez del propuesto Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia.

En conclusión, el Segundo Teorema de incompletitud individua otra clase de enunciados esencialmente indecidibles en toda Teoría que satisface las hipótesis del Primero. Mientras el Primer Teorema de incompletitud determina sólo el enunciado de Gödel, el Segundo extiende la indecidibilidad a una categoría mucho más amplia de proposiciones. Pero, aparte de tal drástica generalización, este Teorema no introduce ningún espectacular concepto epistemológico nuevo acerca de la consistencia del Sistema, en contra de lo que habitualmente se cree. Tampoco lo haría si fuera válido *para cada* enunciado interpretable como "este Sistema es consistente" (lo cual, ratificamos, parece ser falso). Porque, en todo caso, de ello no puede concluirse que "el Sistema no puede demostrar su propia consistencia": esta sentencia compete a un Metateorema *del todo general* que nunca ha sido puesto en evidencia, a pesar de su inmediatez e indiscutibilidad[33].

---

31 G. LOLLI, *Da Euclide a Gödel*, ed. Il Mulino (2004), p. 140 y 142. A. Martini, *Notazioni ordinali e progressioni transfinite di teorie*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Pisa (2006), p. 11-15, en la Web: http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-11082006-161824/unrestricted/tesi.pdf.

32 G. LOLLI, *op. cit.*, p. 142.

33 La consistencia de un Sistema puede ser demostrada sólo por otro Sistema, externo al primero. Para el cual, a su vez, se vuelve a plantear el problema de la consistencia. La "ultima" conclusión de consistencia, para poder salir de esta cadena interminable, tiene que ser puramente metamatemática. Actualmente, la Teoría más general (que demuestra la consistencia de las ordinarias Disciplinas matemáticas) es la Teoría axiomática de los conjuntos y la conclusión metamatemática de su consistencia se difumina en una "sensata convicción".

La Torre del Virrey
Revista de Estudios Culturales

A menudo el error se agrava con un tipo de "demostraciones intuitivas", incorrectas, del Segundo Teorema de incompletitud, del siguiente estilo: "Sea *S* un Sistema que satisface las hipótesis del Teorema de incompletitud y *C* un enunciado suyo que afirma la consistencia del mismo *S*. El primer Teorema de incompletitud demuestra que si *S* es consistente, el enunciado de Gödel, *G*, es indecidible. Entonces si *C* fuese demostrable, podría deducirse que G es indecidible y por lo tanto indemostrable. Pero como G afirma ser indemostrable, esto significaría demostrar G, lo cual es absurdo. Por lo tanto, C es indemostrable"[34]. El error es manifiesto: en el razonamiento, se da a C y a G un valor semántico que sólo se puede otorgar suponiendo que el Sistema admita un *modelo* con dichas interpretaciones y, por lo tanto, que ya sea consistente. *En este modelo* es indiscutible que la verdad de C implica la verdad de G, pero la implicación *sintáctica* C->G es una cuestión totalmente distinta. En general, no deriva ningún absurdo de la posibilidad de que C sea un teorema porque de ello, como hemos observado, de ninguna manera se sigue que el Sistema es consistente (por otro lado: en caso de inconsistencia, ¿no se verifica que cada enunciado es un teorema?). En realidad, demostrar la implicación sintáctica C->G no es nada trivial y, además, parece no valer siempre sino que depende de la estructura simbólica del enunciado C.

El único resultado de importancia epistemológica relevante sobre la consistencia se debe al Metateorema de su indemostrabilidad interna. Y destacamos que la metademostración de éste, al referirse a un Sistema clásico cualquiera, debe consistir en un razonamiento puramente metamatemático, o sea, no puede formalizarse.

Terminamos aquí nuestro repaso de equivocaciones. Otras revisiones, junto a algunas propuestas de actualización en la terminología de estos argumentos – que continua inalterada desde los tiempos de Hilbert – pueden hallarse en el libro, ya citado, *Confines Lógicos de la Matemática*.

La Torre del Virrey
Revista de Estudios Culturales

34 Así, por ejemplo, en: P. Odifreddi, *Metamorfosi di un Teorema*, 1994, en la *Web*: http://www.vialattea.net/odifreddi/godel.htm